格拉夫斯根据哈密尔顿的发现由此推广到他称为“八元数”（Octaves 或者 Octonions）这是包含哈密尔顿四元数的另外一种新数，而且满足“模法则”，即对于任意 $a_1$，…，$a_8$；$b_1$，…，$b_8$，我们一定可以找到 $c_1$，…，$c_8$ 使得：

$$(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_8^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_8^2)=c_1^2+c_2^2+\cdots+c_8^2$$

这种八元数，像四元数一样可以在这上面实施加、减、乘、除的运算。

哈密尔顿很高兴格拉夫斯的推广，他详细研究这八元数，发现这八元数的乘法是不满足结合律，一般来说给出三个八元数 $A$，$B$，$C$ 会有 $A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C$ 的现象。

格拉夫斯很想再推广，看是否能再构造 $2^n$ 元数（这里 $n=1$ 时是复数，$n=2$ 时是四元数，$n=3$ 时是八元数）。$n$ 大于或等于 4。可是却找不到。在 1852 年 12 月格拉夫斯告诉哈密尔顿原来与模法则有关的四平方和定理在他们前 80 多年大数学家欧拉已发现。而他所发现的八平方和定理在 34 年前丹麦数学家达根（Degan）已在俄国的数学杂志发表，达根错误地叙述自己能推广到其他 $2^n$ 平方和的情形。

1848 年凯克曼（T. P. Kirkman）证明不存在 $2^4=16$ 平方和定理。

很巧，英国数学家凯利（Cayley）在不知道格拉夫斯的结果的情形下，也同时发现八元数。由于凯利在数学上的成就比格拉夫斯还高，一般人称八元数为“凯利数”。

是否还可以利用实数，类似复数、四元数、八元数的构造法再构造出一些新的数体在上面能实施加、减、乘、除的运算？在 1958 年时三位著名的拓扑学家波德（R. Bott）、米诺（J. Milnor）、科威尔（Kervaire）同时候证明了：在实数域上能构造的有限维斜体（Divison Algebra 即能施行加、减、乘、除的数学体系）只有是 1 维（实数域），2 维（复数域），4 维（四元数域）