j 的向量那就跑到四维空间的情形。真是奇怪两个属于三维空间的向量乘积，却跑到四维空间来，这令哈密尔顿觉得莫名其妙。

柳暗花明又一村

哈密尔顿这时想是否最初不应该设“三元数”而是应该考虑“四元数”呢？

这时他就对 $a+bi+cj+dk$ 进行研究。既然 $ij=-ji=k$，那么 ik，ki，jk，kj 究竟是什么东西呢？

我们现在回过来看看哈密尔顿写给儿子那封信吧！

“……我看我们或许有 $ik=-j$，因为 $ik=i(ij)$ 而 $i^2=-1$，类似这样子我们或许可期望 $kj=(ij)j=-i$。

……由此我想或许 $ki=j$，$jk=i$，因为这很可能如果 $ji=-ij$，我们就会有 $kj=-jk$，$ik=-ki$。”

我们知道对普通整数 z 来说，二元运算：加（+）及乘（×）都满足结合律（Associative Law），即：

$a+(b+c)=(a+b)+c$

和 $a\times(b\times c)=(a\times b)\times c$

因此加法和乘法运算时，次序先后显得不重要。

可是哈密尔顿还不知道这新数对于乘法是否能满足结合律，不然的话他就可以由 $i(ij)=(ii)j=(-1)j=-j$，同样也可以用结合律很容易得到：

$ki=-(ji)i=-j(ii)=(-j)(-1)=j$

因此他只能用类比（analogy）的方法猜测结果。

哈密尔顿寻找三元数的乘积的规律，不断冥思苦想，可是“上穷碧落下黄泉，两处茫茫皆不见”。怎么办呢？应该停止去搞其他工作还是坚持下去呢？

中国人有句老话说得很好：“锲而舍之，朽木不折；锲而不