我们先看 ij 的平方是什么？$(ij)^2=(ij)(ij)=i(ji)j=i(ij)j=i^2j^2=(-1)(-1)=1$ 所以 $ij=1$ 或者 $ij=-1$。

可是假定 $ij=1$ 或 $ij=-1$ 也好，都不能使这新数满足他所要求的“模法则”。

因此最初假定 $ij=ji$ 是不能得到所需要的结果。那么怎么办呢？

(2) **第二次失败** 这时哈密尔顿考虑最简单的情况

$(a+bi+cj)^2=a^2-b^2-c^2+2abi+2acj+2bcij$ 现在取上式右边向量 1，i，j 的系数 $(a^2-b^2-c^2)$，$2ab$，$2ac$ 的平方并取和，哈密尔顿发现

$$(a^2-b^2-c^2)^2+(2ab)^2+(2ac)^2=(a^2+b^2+c^2)^2$$

这刚好就是“模法则”，因此哈密尔顿假设 $ij=0$，这样就不必考虑到 $(2bc)^2$ 这项了。

可是过不久他觉得这样做有些不妥当的地方，因为 i、j 的模都是 1，照“模法则” ij 的模应该是 1 而不会等于零，因此设 $ij=0$ 就不合理。

而他这时选择 $ij=-ji$，并设 $ij=k$。这样假定的好处是“模法则”成立，但是 k 究竟是什么东西呢？

这时他考虑一般新数的乘积：

$$(a+bi+cj)(x+yi+zj)$$
$$=(ax-by-cz)+(ay+bx)i+(az+cx)j+(bz-cy)k$$

如果设 $k=0$ 是否“模法则”能成立？由左式可得

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \qquad (A)$$

由右式可得

$$(ax-by-cz)^2+(ay+bx)^2+(az+cx)^2 \qquad (B)$$

是否 $(A)=(B)$ 呢？读者算算看会发现 $(A)-(B)=(bz-cy)^2$

这刚好是 k 的系数的平方，如果把 k 当作也同时垂直 1，i，