

勒让得 (Legendre) 写的名著《数论》一书里就举一个例子： $3 = 1 + 1 + 1$ 及 $21 = 16 + 4 + 1$ 都可以表示成三个平方数的和，可是 $3 \times 21 = 63$ 却不能表示为三个平方数的和。(理由：凡是形如 $8n + 7$ 的整数都不能表示为三个平方数的和。)

如果哈密尔顿知道勒让得的结果，他就不会花太多时间去寻找这新数的乘积，因为这是徒劳无功的工作。可是，或许哈密尔顿就不会由此从错误走向正确，因而发现了四元数。哈密尔顿为了找这新数花了 15 年的时间去探索！

让我们看看哈密尔顿在去世前几天写给儿子回忆他发现四元数前的工作情况：“……在 1843 年 10 月初的每一天早晨，当我下楼吃早餐时，你及你的哥哥威廉·艾尔文常常这样问我：‘爸爸，你已能把三数组 (triplet) 乘起来吗？’而我只能悲伤的摇摇头说：‘不，还不行！我只能把它们加或减。’……”

山穷水尽疑无路

研究一下哈密尔顿在发现四元数过程所犯的错误的很有意义的。这一方面提供数学家怎么样研究的活生生例子，另外方面也告诉我们：如果我们每次在工作失败后懂得总结经验，分析失败的原因，然后百折不挠，坚持到底，这样失败的黑暗将慢慢消失，胜利的曙光就会在远处鼓舞我们前进，最后达到目的地。

(1) 第一次失败 哈密尔顿想找的新数 $a + bi + cj$ 是包含复数为子集，就像复数 $a + bi$ 是包含实数为子集一样。因此复数的一些性质，如 $ii = -1$ 是应该保留的。

类比这个结果，哈密尔顿猜想 $jj = -1$ 。可是 ij 和 ji 是什么东西呢？最初他是设想 $ij = ji$ ，由此计算出 $(a + bi + cj)(x + yi + zj) = (ax - by - cz) + (ay + bx)i + j(az + cx) + (bz + cy)ij$ 。

现在怎么样处理 ij 呢？它是否也是 $e + fi + gj$ 的形式？